Exercices supplémentaires : Trigonométrie

Partie A : Cercle trigonométrique, cosinus et sinus

Exercice 1

Convertir en radians les mesures d'angles exprimées en degrés : $60°$; $150°$; $10°$; $12°$; $198°$; $15°$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivant, donner trois autres réels associés au même point sur le cercle trigonométrique :

1) $-\pi$
2) $\frac{3\pi}{2}$
3) 10π
4) $-\frac{\pi}{4}$

Exercice 3

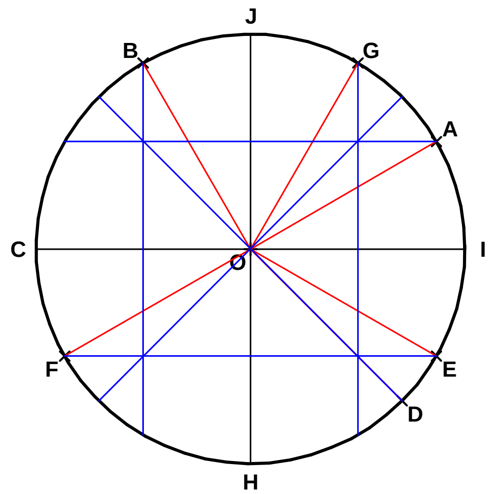
Parmi les mesures suivantes, indiquer celles qui sont associés au même point que $-\frac{\pi}{12}$ sur le cercle trigonométrique.

$$\frac{47\pi}{12} ; -\frac{49\pi}{12} ; \frac{11\pi}{12} ; -\frac{241\pi}{12} ; -\frac{37\pi}{12} ; -\frac{313\pi}{12}$$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer si x et y sont des mesures d'un même angle orienté.

1) $x = \frac{\pi}{2}$; $y = \frac{3\pi}{2}$
2) $x = \frac{5\pi}{3}$; $y = -\frac{21\pi}{4}$
3) $x = \frac{29\pi}{3}$; $y = -\frac{2\pi}{3}$
4) $x = \frac{43\pi}{12}$; $y = -\frac{5\pi}{12}$



Exercice 5

Sur le cercle trigonométrique ci-contre, déterminer les réels associés aux points $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ et J.

Exercice 6

Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C, D, E et F repérés par $\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{4}$ et $-\frac{2\pi}{3}$

Exercice 7

On considère un réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

1) Déterminer la valeur exacte de $\cos(x)$.
2) On sait que $x \in \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}; -\frac{5\pi}{12}\right\}$. Déterminer la valeur exacte de x.

Exercice 8

1) Sachant que $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, calculer la valeur de $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$.
2) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, déterminer $\cos(x)$

1) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et $\sin(x) = \frac{1}{4}$
2) $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ et $\sin(x) = -0{,}6$
3) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ et $\sin(x) = -\frac{2}{3}$

Partie B : Angle orienté, mesure principale d'un angle

Exercice 1

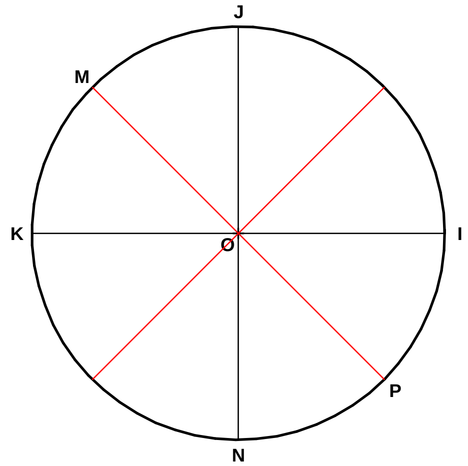
Déterminer la mesure principale des angles dont les mesures en radians sont :

$$-\frac{7\pi}{3}\ ;\ -\pi ; \frac{13\pi}{6} ; \frac{47\pi}{12}\ ;\ -\frac{49\pi}{6} ; \frac{11\pi}{3}\ ;\ -\frac{241\pi}{4} ;\ -\frac{37\pi}{12}\ ; 3{,}14\ ; 2013$$

Exercice 2

Donner une mesure en radian des angles orientés suivants :

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$; $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON})$; $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OP})$; $(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OP})$; $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$; $(\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OM})$



Exercice 3

1) Construire un triangle direct ABC rectangle en A tel que $BC = 2AC$.
2) Construire deux triangles équilatéraux direct ACD et ABE.
3) Donner une mesure en radian des angles $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$; $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{CB})$.

Exercice 4

ABC est un triangle rectangle en A, direct, tel que $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et ACD est un triangle équilatéral direct.

1) Faire une figure.
2) Déterminer la mesure principale des angles suivant : $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA})$; $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$

Exercice 5

ABC est un triangle rectangle en A direct tel que $BC = 2AC$. ACD est un triangle rectangle isocèle en C direct et BAE est un triangle équilatéral direct.

1) Faire une figure.
2) Déterminer la mesure principale des angles suivants :$(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{BC})$.

Exercice 6

Sachant que $(\vec{u}\,;\vec{v}) = -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$, déterminer la mesure principale de $(2\vec{u}\ ;\ \vec{v})$; $(-\vec{v}\ ; 2\vec{u})$; $(3\vec{v};-2\vec{u})$

Exercice 7

Sachant que $(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{\pi}{7}\ [2\pi]$ et $(\vec{u};\vec{w}) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, déterminer la mesure principale de $(\vec{v};\vec{w})$; $(-\vec{u};\vec{v})$ et $(-\vec{w};\vec{v})$.

Exercice 8

A, B, C et D sont quatre points du plan. Démontrer l'égalité :

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) = 0[2\pi]$$

Partie C : Angles associés

Exercice 1

On considère un entier relatif n (il peut être positif ou négatif).

Déterminer, éventuellement en fonction de n, le cosinus et le sinus des réels :

$$2n\pi ; (2n+1)\pi\ ;\ n\pi\ ;\ -\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi$$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos(\pi)$
2) $B = \cos(-\pi) + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
3) $C = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin(\pi)$

Exercice 3

Exprimer en fonction de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$ les réels suivants :

1) $A = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$

2) $B = \sin(x + 100\pi)$
3) $C = \cos\left(\frac{2012\pi}{2} + x\right)$
4) $D = \sin\left(\frac{2013\pi}{2} + x\right)$
5) $E = \sin(x - 78\pi)$
6) $F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) - 5\sin(\pi + x)$
7) $G = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2\cos(-x - \pi) + 5\sin(-x)$

Exercice 4
Calculer les valeurs exactes de : $\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)$; $\sin\left(-\frac{18\pi}{4}\right)$; $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)$

Partie D : Equations et inéquations trigonométriques

Exercice 1
A l'aide d'un cercle trigonométrique, donner toutes les valeurs possibles de x vérifiant les conditions données.

1) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ et $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $x \in [-\pi; \pi]$
2) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $x \in [-\pi; \pi]$
3) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ avec $x \in [-\pi; 3\pi]$
4) $\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = -1$ avec $x \in [-2\pi; 3\pi]$

Exercice 2
Résoudre les équations ci-dessous dans $\mathbb{R}$

1) $\cos(x) = \frac{1}{2}$
2) $\sin(x) = \frac{1}{2}$
3) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
4) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 3
Placer sur le cercle trigonométrique les points repérés par les équations suivantes :

1) $2x = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
2) $4x = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
3) $3x = \frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$

Exercice 4
Résoudre les équations trigonométriques suivantes.

1) $\cos(2x) = \cos\left(\frac{8\pi}{2}\right)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[\pi; 5\pi]$
2) $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-2\pi; 2\pi]$
3) $\cos(3x) = -\cos(x)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-2\pi; \pi]$
4) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin(x)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[4\pi; 6\pi]$
5) $\sin(3x) = \cos(2x)$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 5
Représenter sur un cercle trigonométrique l'ensemble des points M du cercle associés aux réels x vérifiant :

1) $0 \leq \cos(x) \leq 1$
2) $\cos(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$
3) $-1 < \sin(x) < 0$
4) $-\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq 1$
5) $\sin(x) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right[$
6) $\cos(x) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Exercice 6

Résoudre à l'aide du cercle trigonométrique les inéquations suivantes :

1) $\sin(x) < \frac{1}{2}$ dans $]-\pi; \pi]$
2) $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi]$
3) $\cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ dans $[-\pi; 3\pi]$
4) $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[-\pi; 2\pi]$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1) $2\cos^2(x) + 9\cos(x) + 4 = 0$
2) $4\sin^2(x) - 2(1 + \sqrt{3})\sin(x) + \sqrt{3} = 0$

Exercice 8

1) Déterminer les racines éventuelles du trinôme t défini par $t(x) = -4x^2 + (2\sqrt{3} - 2)x + \sqrt{3}$.
2) Factoriser $t(x)$
3) Etablir dans $[0; 2\pi]$ le signe de $2\cos(x) + 1$ et de $-2\cos(x) + \sqrt{3}$
4) En déduire le signe sur $[0; 2\pi]$ de $-4\cos^2(x) + (2\sqrt{3} - 2)\cos(x) + \sqrt{3}$.

Exercices supplémentaires : Trigonométrie

Partie A : Cercle trigonométrique, cosinus et sinus

Exercice 1

Angle en °	60	150	10	12	198	15
Angle en radians	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{15}$	$\frac{11\pi}{10}$	$\frac{\pi}{12}$

Exercice 2

1) $-\pi : \pi; 3\pi; 5\pi$ et plus généralement $\pi + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
2) $\frac{3\pi}{2} : -\frac{\pi}{2} ; \frac{7\pi}{2} ; \frac{11\pi}{2}$ et plus généralement $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, soit $\frac{-\pi+4\pi k}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$
3) $10\pi : 0; 2\pi; 4\pi$ et plus généralement $2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
4) $-\frac{\pi}{4} : \frac{7\pi}{4} ; \frac{15\pi}{4} ; \frac{23\pi}{4}$ et plus généralement $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ soit $\frac{(-\pi+8\pi k)}{4}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 3

$\frac{47\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{48\pi}{12} = 4\pi$ ce qui correspond à un écart de deux tours.

$-\frac{49\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{48\pi}{12} = -4\pi$ ce qui correspond à un écart de deux tours.

$\frac{11\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{12\pi}{12} = \pi$ ce qui correspond à un demi-tour.

$-\frac{241\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{240\pi}{12} = -20\pi$ ce qui correspond à un écart de 10 tours.

$-\frac{37\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{36\pi}{12} = -3\pi$ ce qui correspond à un tour et demi.

$-\frac{313\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{312\pi}{12} = -26\pi$ ce qui correspond à un écart de 13 tours.

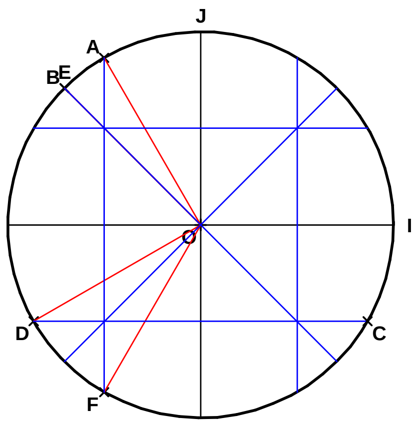
Finalement, $\frac{47\pi}{12}$; $-\frac{49\pi}{12}$; $-\frac{241\pi}{12}$ et $-\frac{313\pi}{12}$ sont associés au même point que $-\frac{\pi}{12}$.

Exercice 4

1) $x - y = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\pi$ donc x et y ne sont pas des mesures d'un même angle orienté.
2) $x - y = \frac{5\pi}{3} + \frac{21\pi}{4} = \frac{20\pi+63\pi}{12} = \frac{83\pi}{12}$ donc x et y ne sont pas des mesures d'un même angle orienté.
3) $x - y = \frac{29\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{31\pi}{3}$ donc x et y ne sont pas des mesures d'un même angle orienté.
4) $x - y = \frac{43\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{48\pi}{12} = 4\pi$ donc x et y sont des mesures d'un même angle orienté.

Exercice 5

$A : \frac{\pi}{6}$; $B : \frac{2\pi}{3}$; $C : \pi$; $D : -\frac{\pi}{4}$; $E : -\frac{\pi}{6}$; $F : -\frac{5\pi}{6}$; $G : \frac{\pi}{3}$;
$H : -\frac{\pi}{2}$; $I : 0$; $J : \frac{\pi}{2}$



Exercice 6

Voir le cercle ci-contre.

Exercice 7

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{2 - 2\sqrt{12} + 6}{16}$$
$$= \frac{16 - (8 - 2\sqrt{12})}{16} = \frac{8 + 2\sqrt{12}}{16} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{16}$$

Donc $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ou $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Or, comme $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x)$ est positif donc $\boxed{\cos(x) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

2) $\sin(x) < 0$ donc $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$ et de plus $|\cos(x)| > |\sin(x)|$ donc $x \in \left[-\frac{\pi}{4} ; 0\right]$ et finalement $\boxed{x = -\frac{\pi}{12}}$

Exercice 8

1)

$$\sin^2\left(\frac{9\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{9\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{5+2\sqrt{5}+1}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

De plus $\frac{9\pi}{5} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ donc $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) < 0$ et donc $\boxed{\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$

2) $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{10\pi}{5} - \frac{5\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ donc $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}}$

$\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ donc $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$

Exercice 9

1) $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ donc $\cos(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ou $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

Or $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ donc $\cos(x) \leq 0$ et donc $\boxed{\cos(x) = -\frac{\sqrt{15}}{4}}$

2) $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - (-0{,}6)^2 = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$ donc $\cos(x) = 0{,}8$ ou $-0{,}8$.

Or $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(x) \geq 0$ et $\boxed{\cos(x) = 0{,}8}$

3) $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ donc $\cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ou $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Or $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ donc $\cos(x) \geq 0$ et $\boxed{\cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{3}}$

Partie B : Angle orienté, mesure principale d'un angle

Exercice 1

Pour $-\frac{7\pi}{3}$:

$$-3 < -\frac{7\pi}{3} < -2 \Leftrightarrow -3\pi < -\frac{7\pi}{3} < -2\pi \Leftrightarrow -\pi < -\frac{7\pi}{3} + 2\pi < 0 \Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{3} < 0$$

La mesure principale de $-\frac{7\pi}{3}$ est $\boxed{-\frac{\pi}{3}}$

Pour $-\pi$: la mesure principale de $-\pi$ est $\boxed{\pi}$

Pour $\frac{13\pi}{6}$:

$$2 < \frac{13}{6} < 3 \Leftrightarrow 2\pi < \frac{13\pi}{6} < 3\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{13\pi}{6} - 2\pi < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} < \pi$$

Donc la mesure principale de $\frac{13\pi}{6}$ est $\boxed{\frac{\pi}{6}}$

Pour $\frac{47\pi}{12}$

$$3 < \frac{47}{12} < 4 \Leftrightarrow 3\pi < \frac{47\pi}{12} < 4\pi \Leftrightarrow -\pi < \frac{47\pi}{12} - 4\pi < 0 \Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{12} < 0$$

Donc la mesure principale de $\frac{47\pi}{12}$ est $\boxed{-\frac{\pi}{12}}$

Pour $-\frac{49\pi}{6}$

$$-9 < -\frac{49}{6} < -8 \Leftrightarrow -9\pi < -\frac{49\pi}{6} < -8\pi \Leftrightarrow -\pi < -\frac{49\pi}{6} + 8\pi < 0 \Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{6} < 0$$

Donc la mesure principale de $-\frac{49\pi}{6}$ est $\boxed{-\frac{\pi}{6}}$

Pour $\frac{11\pi}{3}$

$$3 < \frac{11}{3} < 4 \Leftrightarrow 3\pi < \frac{11\pi}{3} < 4\pi \Leftrightarrow -\pi < \frac{11\pi}{3} - 4\pi < 0 \Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{3} < 0$$

Donc la mesure principale de $\frac{11\pi}{3}$ est $\boxed{-\frac{\pi}{3}}$

Pour $-\frac{241\pi}{4}$

$$-61\pi < -\frac{241\pi}{4} < -60\pi \Leftrightarrow -\pi < -\frac{241\pi}{4} + 60\pi < 0 \Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{4} < 0$$

Donc la mesure principale de $-\frac{241\pi}{4}$ est $\boxed{-\frac{\pi}{4}}$

Pour $-\frac{37\pi}{12}$

$-4 < -\frac{37}{12} < -3 \Leftrightarrow -4\pi < -\frac{37\pi}{12} < -3\pi \Leftrightarrow 0 < -\frac{37\pi}{12} + 4\pi < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{11\pi}{12} < \pi$

Donc la mesure principale de $-\frac{37\pi}{12}$ est $\boxed{\frac{11\pi}{12}}$

Pour 3,14

$0 < \frac{3{,}14}{\pi} < 1 \Leftrightarrow 0 < 3{,}14 < \pi$ donc la mesure principale de 3,14 est $\boxed{3{,}14}$

Pour 2013 :

$640 < \frac{2013}{\pi} < 641 \Leftrightarrow 640\pi < 2013 < 641\pi \Leftrightarrow 0 < 2013 - 640\pi < \pi$

Donc la mesure principale de 2013 est $\boxed{2013 - 640\pi}$

Exercice 2

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = \boxed{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON}) = \boxed{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \ \text{ avec } \ k \in \mathbb{Z}}$

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OP}) = \boxed{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \ \text{ avec } \ k \in \mathbb{Z}}$

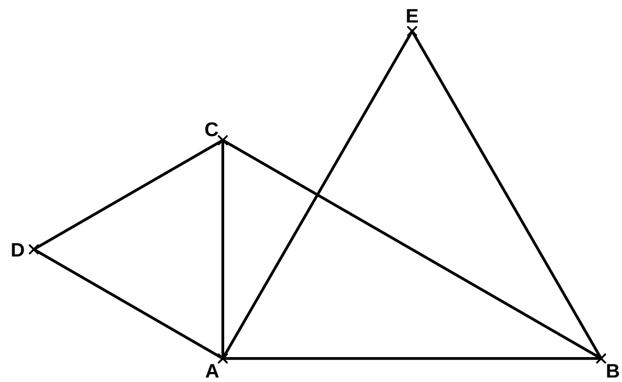
$(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OP}) = \boxed{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \ \text{ avec } \ k \in \mathbb{Z}}$

$(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}) = \boxed{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \ \text{ avec } \ k \in \mathbb{Z}}$

$(\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OM}) = \boxed{\pi + 2\pi k \ \text{ avec } \ k \in \mathbb{Z}}$

Exercice 3

1) Voir la figure
2) Voir la figure
3) Dans le triangle ABC,



$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ donc $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$. Donc, vue l'orientation,

$(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \boxed{\frac{\pi}{3} + 2\pi k \ \text{ avec } \ k \in \mathbb{Z}}$

$(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}) \quad [2\pi]$

$= -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \ \ [2\pi]$

$\boxed{= -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \ \text{ avec } \ k \in \mathbb{Z}}$

$(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{CB}) \quad [2\pi]$

$= -\frac{\pi}{3} + \pi + (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) \ \ [2\pi]$

$= \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \ \ [2\pi]$

$= \boxed{\pi + 2\pi k \ \text{ avec } \ k \in \mathbb{Z}}$

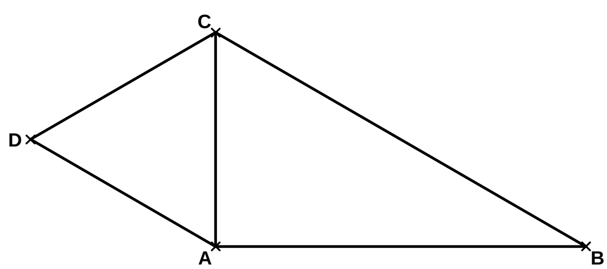
$(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CB}) \quad [2\pi]$

$= \frac{\pi}{2} + \pi \ \ [2\pi]$

$= \boxed{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \ \text{ avec } \ k \in \mathbb{Z}}$

Exercice 4

1) Voir la figure
2)

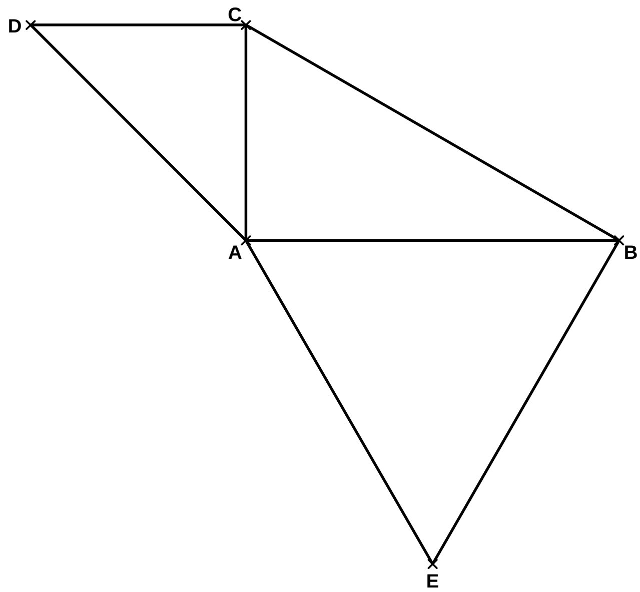


$(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})$
$= (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) \quad [2\pi]$
$= -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$
$= \boxed{-\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]}$

$(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}) \ [2\pi]$
$= \boxed{\frac{\pi}{3} \ [2\pi]}$

$(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{CA})$
$+ (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BA}) \ [2\pi]$
$= \pi + (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA})$
$+ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) \ [2\pi]$
$= \pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$
$= \boxed{\frac{5\pi}{6} \ [2\pi]}$

Dans le triangle ABC, $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = \pi$ donc $\widehat{ACB} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Donc, vue l'orientation, $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \boxed{\frac{\pi}{3} \ [2\pi]}$



Exercice 5

1) Voir la figure
2) Dans le triangle ABC,

$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ donc $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$.

$(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}) \ [2\pi]$
$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$
$= -\frac{13\pi}{12} \ [2\pi]$
$= \boxed{\frac{11\pi}{12} \ [2\pi]}$

$(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{AD}) \ [2\pi]$
$= -\frac{\pi}{3} + \pi + (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}) \ [2\pi]$
$= \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$
$= \boxed{\frac{11\pi}{12} \ [2\pi]}$

$(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{EA};\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BC}) \ [2\pi]$
$= \pi + (\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}) + \pi + (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CB}) \ [2\pi]$
$= 2\pi - (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}) - (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AD}) \ [2\pi]$
$= 2\pi - \frac{11\pi}{12} - \frac{11\pi}{12} \ [2\pi]$
$= \frac{2\pi}{12} \ [2\pi]$
$= \boxed{\frac{\pi}{6} \ [2\pi]}$

Exercice 6

$(2\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})$
$= \boxed{-\frac{3\pi}{4} \ [2\pi]}$

$(-\vec{v}\ ; 2\vec{u}) = (-v;\vec{u}) \ [2\pi]$
$= \pi + (v;\vec{u}) \quad [2\pi]$
$= \pi - (\vec{u};\vec{v}) \quad [2\pi]$
$= \pi + \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$
$= \frac{7\pi}{4} \ [2\pi]$
$= \boxed{-\frac{\pi}{4} \ [2\pi]}$

$(3\vec{v};-2\vec{u}) = (\vec{v};-\vec{u}) \ [2\pi]$
$= -(-\vec{u};\vec{v}) \ [2\pi]$
$= -(\pi + (\vec{u};\vec{v})) \quad [2\pi]$
$= -\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) \ [2\pi]$
$= \boxed{-\frac{\pi}{4} \ [2\pi]}$

Exercice 7

$(\vec{v};\vec{w}) = (\vec{v};\vec{u}) + (\vec{u};\vec{w}) \quad [2\pi]$
$= -(\vec{u};\vec{v}) + (\vec{u};\vec{w}) \quad [2\pi]$
$= \frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$

$= \boxed{-\frac{3\pi}{28} \quad [2\pi]}$

$(-\vec{u};\vec{v}) = \pi + (\vec{u};\vec{v}) \ [2\pi]$
$= \pi - \frac{\pi}{7} \ [2\pi]$

$= \boxed{\frac{6\pi}{7}\ \ [2\pi]}$

$(-\vec{w};\vec{v}) = \pi + (\vec{w};\vec{v})\ \ [2\pi]$
$= \pi - (\vec{v};\vec{w})\ \ [2\pi]$
$= \pi + \frac{\pi}{4}\ \ [2\pi]$

$= \frac{5\pi}{4}\ \ [2\pi]$
$= \boxed{-\frac{3\pi}{4}\ \ [2\pi]}$

Exercice 8

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$
$= \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AB}\right)\ \ [2\pi]$ car $(-\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})\ \ \ [2\pi]$
$= \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB}\right)\ \ [2\pi]$ grâce à la relation de Chasles
$= 0\ \ [2\pi]$

<u>Partie C : Angles associés</u>

Exercice 1

$\cos(2n\pi) = \cos(2\pi\times n) = \cos(0) = \boxed{1}$ et $\sin(2n\pi) = \sin(2\pi\times n) = \sin(0) = \boxed{0}$
$\cos\big((2n+1)\pi\big) = \cos(2\pi\times n+\pi) = \cos(\pi) = \boxed{-1}$ et $\sin\big((2n+1)\pi\big) = \sin(2\pi\times n+\pi) = \sin(\pi) = \boxed{0}$
$\cos(n\pi) = \boxed{\begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}}$ à l'aide des deux calculs précédents et $\sin(n\pi) = \boxed{0}$
$\cos\left(-\frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\times n+\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{0}$ et
$\sin\left(-\frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{1}$

Exercice 2

1) $A = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos(\pi)$

$= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \boxed{0}$

2) $B = \cos(-\pi) + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$= -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{-1}$

3) $C = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin(\pi)$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 = \boxed{2+\sqrt{3}}$

Exercice 3

1) $A = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \boxed{-\sin(x)}$
2) $B = \sin(x + 100\pi) = \sin(x + 2\pi\times 50) = \boxed{\sin(x)}$
3) $C = \cos\left(\frac{2012\pi}{2} + x\right) = \cos(1006\pi + x) = \cos(2\pi\times 503 + x) = \boxed{\cos(x)}$
4) $D = \sin\left(\frac{2013\pi}{2} + x\right) = \sin\left(1006\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(2\pi\times 503 + \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right)$

$= \cos(-x) = \boxed{\cos(x)}$

5) $E = \sin(x - 78\pi) = \sin(x - 2\pi\times 39) = \boxed{\sin(x)}$
6) $F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) - 5\sin(\pi + x) = \sin(x) - 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 5\times(-\sin(x))$

$= \sin(x) - 4\cos(x) + 5\sin(x) = \boxed{6\sin(x) - 4\cos(x)}$

7) $G = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2\cos(-x - \pi) + 5\sin(-x) = \cos(x) + 2\cos(x) - 5\sin(x) = \boxed{3\cos(x) - 5\sin(x)}$

Exercice 4

$\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}}$
$\sin\left(-\frac{18\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{-1}$

$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{32\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(-8\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Partie D : Equations et inéquations trigonométriques

Exercice 1

1) $x = \boxed{-\frac{\pi}{3}}$
2) $x = \boxed{\frac{\pi}{4}}$
3) $x \in \boxed{\left\{-\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}}$
4) $x \in \boxed{\left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}}$

Exercice 2

1) $\cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ou $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2\pi k\ ;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$

2) $\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ou $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k\ ; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$

3) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ ou $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $\boxed{S = \left\{\frac{5\pi}{5} + 2\pi k\ ;\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$

4) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow s = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ou $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi k\ ; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$

Exercice 3

1) $2x = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

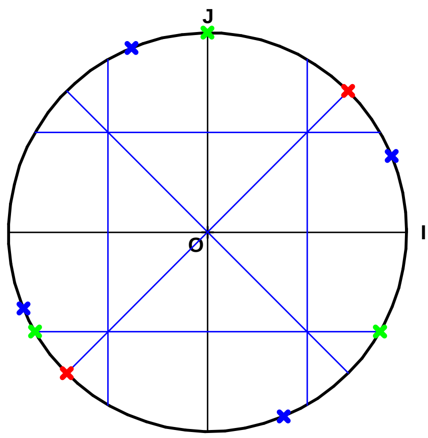
Cela donne donc deux points en rouges sur la figure.

2) $4x = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Cela donne donc quatre points en bleu sur la figure.

3) $3x = \frac{3\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow 3x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Cela donne donc trois points en vert sur la figure.



Exercice 4

1) $\cos(2x) = \cos\left(\frac{8\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(4\pi) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(0) \Leftrightarrow 2x = 0 + 2\pi k \Leftrightarrow x = \pi k$

Donc $\boxed{S = \{\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}}$ pour la résolution dans $\mathbb{R}$ et $\boxed{S = \{\pi; 2\pi; 3\pi; 4\pi; 5\pi\}}$ dans $[\pi; 5\pi]$

En effet : $\pi \leq \pi k \leq 5\pi \Leftrightarrow 1 \leq k \leq 5$ donc $k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

2) $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{5} + 2\pi k$ ou $x - \frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{5} + 2\pi k$

$\Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{15} + 2\pi k$ ou $x = \frac{22\pi}{15} + 2\pi k$

Donc $\boxed{S = \left\{\frac{13\pi}{15} + 2\pi k\ ; \frac{22\pi}{15} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$ dans $\mathbb{R}$

De plus : $-2\pi \leq \frac{13\pi}{15} + 2\pi k \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{43\pi}{15} \leq 2\pi k \leq \frac{17\pi}{15} \Leftrightarrow -\frac{43}{30} \leq k \leq \frac{17}{30} \Rightarrow -1 \leq k \leq 0$ donc $k \in \{-1; 0\}$ ce qui donne $\frac{13\pi}{15} - 2\pi$, soit $-\frac{17\pi}{15}$ et $\frac{13\pi}{15}$.

D'autre part, $-2\pi \leq \frac{22\pi}{15} + 2\pi k \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{52}{30} \leq k \leq \frac{8}{30} \Rightarrow -1 \leq k \leq 0$ donc $k \in \{-1; 0\}$ ce qui donne $\frac{22\pi}{15} - 2\pi$, soit $-\frac{8\pi}{15}$ et $\frac{22\pi}{15}$. Finalement, $\boxed{S = \left\{-\frac{17\pi}{15}; \frac{13\pi}{15}; -\frac{8\pi}{15}; \frac{22\pi}{15}\right\}}$ dans $[-2\pi; 2\pi]$

3) $\cos(3x) = -\cos(x) \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow 3x = \pi - x + 2\pi k$ ou $3x = -(\pi - x) + 2\pi k$
$\Leftrightarrow 4x = \pi + 2\pi k$ ou $2x = -\pi + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$

Donc $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\ ;\ -\frac{\pi}{2} + \pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$ dans $\mathbb{R}$

$-2\pi \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{9\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}k \leq \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \leq k \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -4 \leq k \leq 1$ donc $k \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}$ ce qui donne $-\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

D'autre part, $-2\pi \leq -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} \leq k\pi \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -1 \leq k \leq 1$ donc $k \in \{-1; 0; 1\}$ ce qui donne $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Finalement, $\boxed{S = \left\{-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}}$

4) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin(x) \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(-x) \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = -x + 2\pi k$ ou $2x + \frac{\pi}{4} = \pi - (-x) + 2\pi k$
$\Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

Donc $\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k\ ;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$ dans $\mathbb{R}$

De plus $4\pi \leq -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k \leq 6\pi \Leftrightarrow \frac{49\pi}{12} \leq \frac{2\pi}{3}k \leq \frac{73\pi}{12} \Leftrightarrow \frac{49}{8} \leq k \leq \frac{73}{8} \Rightarrow 7 \leq k \leq 9$ donc $k \in \{7; 8; 9\}$ ce qui donne $\frac{55\pi}{12}$; $\frac{63\pi}{12}$ et $\frac{71\pi}{12}$.

Et d'autre part, $4\pi \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq 6\pi \Leftrightarrow \frac{13\pi}{4} \leq 2\pi k \leq \frac{21\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{13}{8} \leq k \leq \frac{21}{8} \Rightarrow k = 2$ ce qui donne $\frac{19\pi}{4}$

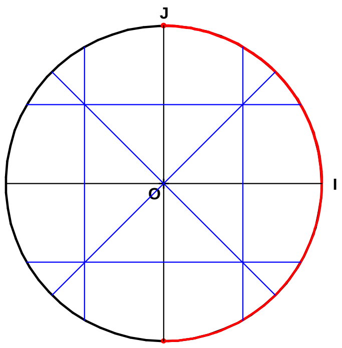
On a donc $\boxed{S = \left\{\frac{55\pi}{12}; \frac{63\pi}{12}; \frac{71\pi}{12}; \frac{19\pi}{4}\right\}}$ dans $[4\pi; 6\pi]$

5) $\sin(3x) = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos(2x) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 3x = 2x + 2\pi k$ ou $\frac{\pi}{2} - 3x = -2x + 2\pi k$
$\Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ou $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k$ ou $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

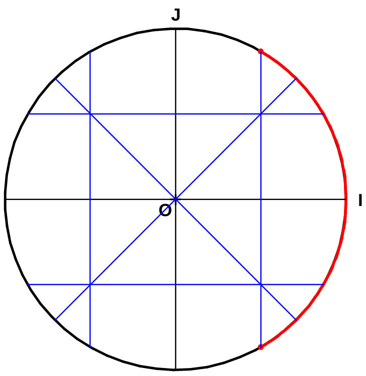
Donc $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k\ ;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$

Exercice 5

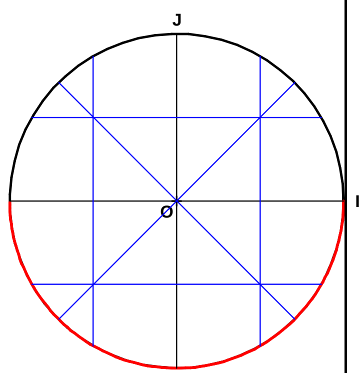
1) $0 \leq \cos(x) \leq 1$



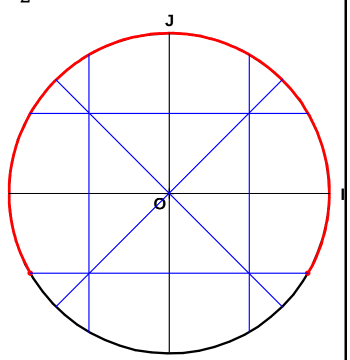
2) $\cos(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$



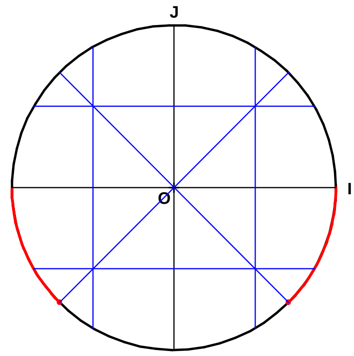
3) $-1 < \sin(x) < 0$



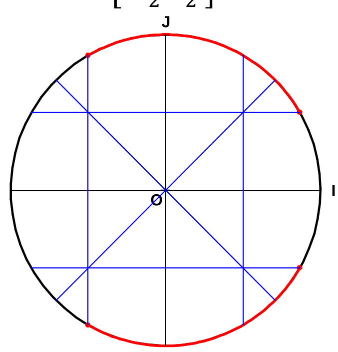
4) $-\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq 1$



5) $\sin(x) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right[$



6) $\cos(x) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$



Exercice 6

1) $\boxed{S = \left]-\pi;\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6};\pi\right]}$
2) $\boxed{S = \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3};2\pi\right]}$
3) $\boxed{S = \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4};\frac{9\pi}{4}\right[}$
4) $\boxed{S = \left[-\pi;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3};2\pi\right]}$

Exercice 7

1) On pose $X = \cos(x)$ et alors $2X^2 + 9X + 4 = 0$. $\Delta = 9^2 - 4 \times 2 \times 4 = 49$ donc cette équation a deux solutions $X_1 = \frac{-9+7}{4} = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{-9-7}{4} = -4$.

On a donc $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ ou $\cos(x) = -4$.

La dernière équation n'a pas de solution car un cosinus est toujours supérieur à -1.

D'autre part, $\cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ou $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

$$\boxed{S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\ ;\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \text{ avec } \ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

2) On pose $X = \sin(x)$ et alors $4X^2 - 2(1+\sqrt{3})X + \sqrt{3} = 0$.

$\Delta = \left(-2(1+\sqrt{3})\right)^2 - 4 \times 4 \times \sqrt{3} = 4(1+\sqrt{3})^2 - 16\sqrt{3} = 4(1 + 2\sqrt{3} + 3) - 16\sqrt{3}$

$= 4 - 8\sqrt{3} + 12 = (2 - 2\sqrt{3})^2$ donc l'équation a deux solutions $X_1 = \frac{2(1+\sqrt{3})+(2-2\sqrt{3})}{8} = \frac{1}{2}$ et

$X_2 = \frac{2(1+\sqrt{3})-(2-2\sqrt{3})}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On a donc $\sin(x) = \frac{1}{2}$ ou $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ ou } \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

Finalement $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k\ ;\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\ ;\frac{\pi}{3} + 2\pi k\ ;\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \text{ avec } \ k \in \mathbb{Z}\right\}}$

Exercice 8

1) $t(x) = -4x^2 + (2\sqrt{3} - 2)x + \sqrt{3}$:

$\Delta = (2\sqrt{3} - 2)^2 - 4 \times (-4) \times \sqrt{3} = 12 - 8\sqrt{3} + 4 + 16\sqrt{3} = 12 + 8\sqrt{3} + 4 = (2\sqrt{3} + 2)^2$

Donc t a deux racines $X_1 = \frac{-(2\sqrt{3}-2)+(2\sqrt{3}+2)}{-8} = \boxed{-\frac{1}{2}}$ et $X_2 = \frac{-(2\sqrt{3}-2)-(2\sqrt{3}+2)}{-8} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

2) $t(x) = \boxed{-4\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (-2x + \sqrt{3})(2x + 1)}$

3) $2\cos(x) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right]$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
Signe de $2\cos(x) + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$-2\cos(x) + \sqrt{3} \leq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0;\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right]$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
Signe de $-2\cos(x) + \sqrt{3}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4) $A(x) = -4\cos^2(x) + (2\sqrt{3} - 2)\cos(x) + \sqrt{3} = t(\cos(x)) = (-2\cos(x) + \sqrt{3})(2\cos(x) + 1)$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$2\cos(x)+1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$-2\cos(x)+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	